Lycée secondaire	Fiche de cours	Prof : Selmi.Ali
Mareth	**Thème** : Suites réelles	Classes : 4ième Math

I- Limités de suites :

Soit (U_n) une suite réelle et a est fini ou infini : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n+1} = a$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_{2n} = a$

Toute suite convergente est bornée

Soit (U_n) une suite une suite qui converge vers un réel a.

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$

- $U_n \geqslant 0$ alors $a \geqslant 0$
- $U_n \leqslant 0$ alors $a \leqslant 0$

Soit (U_n) une suite qui converge vers un réel a, soit $n_0 \in \mathbb{N}$

S'il existe deux réels m et M tel que $m \leqslant U_n \leqslant M$ pour tout $n \geqslant n_0$ alors $m \leqslant a \leqslant M$.

Opérations sur les limites :

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n + V_n)$
a	b	a + b
$+\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	b	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n . V_n$
a	b	a .b
∞	$b \neq 0$	∞(on applique les règles de signes)
∞	∞	∞(on applique les règles de signes)

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$	$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_n}{V_n}$
a	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$
∞	$b \neq 0$	∞(on applique les règles de signes)
a	∞	0
$a \neq 0$	0	∞(on applique les règles de signes)

Suites géométriques

Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$ de premier terme U_0

Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Si q = 1 alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = U_0$

Si $q > 1 \begin{cases} et\ U_0 > 0 & \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty \\ et\ U_0 < 0 & \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty \end{cases}$

Si $q \leqslant -1$ alors (U_n) n'a pas de limite.

II- Suite de Type $V_n = f(U_n)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et U_n une suite d'éléments de I, $a \in I$ Si $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a$ alors

$\lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = f(a)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et U_n une suite d'éléments de I

$$\left.\begin{array}{l} Si \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = a \ (fini\ ou\ infini) \\ et \lim\limits_{x \to a} f(x) = L (fini\ ou\ infini) \end{array}\right\} \text{alors} \lim\limits_{n \to +\infty} f(U_n) = L$$

III- Limites et ordre :

Théorème :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites qui converges respectivement vers deux réels l et l' . S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $U_n \geqslant V_n$ alors $l' \leqslant l$.

Théorème :

Soient (U_n) , (V_n) et (W_n) trois suites tel que V_n et W_n convergent vers un réel l. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $V_n \leqslant U_n < W_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$.

Conséquence :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $0 \leqslant |U_n| < V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$

alors $U_n = 0$

Théorème :

Soient (U_n) et (V_n) deux suites. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $U_n \leqslant V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$

alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $U_n \geqslant V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

IV- Convergence et suites monotones :

Soit (U_n) une suite définie pour $n \geqslant n_0$

Si (U_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel l et pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \leqslant l$.

Si (U_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel l et pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \geqslant l$.

Toute suite croissante et non majoré tend vers $+\infty$

Toute suite décroissante et non minoré tend vers $-\infty$

V- Suites récurrentes :

Soit (U_n) une suite vérifiant le relation $U_{n+1} = f(U_n)$, $n \geqslant 0$ ou f est une fonction .

Si (U_n) est converge vers un réel l et f est continue en l alors f (l) = l

VI- Suites adjacentes :

(U_n) et (V_n) , $n \geqslant 0$ deux suites adjacentes si :

(U_n) pour tout $n \geqslant 0$, $U_n \leqslant V_n$

(U_n) est croissante et la suite (V_n) est décroissante. La suite $V_n - U_n$ converge vers zéro.

Dans ce cas les suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite.